DIE ELASTISCHE LINIE DER GEHÄUSE VON DREHSTROMMASCHINEN MIT GROSSEN DURCHMESSERN

VON

HANS LINSENMANN

DIPLOMINGENIEUR, ASSISTENT AN DER TECHN. HOCHSCHULE ZU MÜNCHEN

VON DER KGL. TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU MÜNCHEN ZUR ERLANGUNG DER WÜRDE EINES DOKTORS DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN (DOKTORINGENIEURS) GENEHMIGTE DISSERTATION

REFERENT: PROFESSOR DR. AUGUST FÖPPL
KORREFERENT: PROFESSOR JOHANN OSSANNA

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1906

Die deformierenden Kräfte in elektrischen Maschinen sind teils mechanische, durch die Eigenschwere und das Drehmoment der Leistung gegeben, teils bedingt durch das Bestreben der Kraftlinien, den Luftraum zwischen Anker und Magnetrad, induziertem und induzierendem System zu verkürzen.

Das Eigengewicht und das am Umfang der Gehäusebohrung wirkende Drehmoment sind stabil elastische Kräfte, d. h. die Vergrößerung ihres deformierenden Einflusses durch die Deformation selbst ist zu vernachlässigen.

Ein labiles elastisches Gleichgewicht dagegen bilden die magnetischen Zugkräfte. Bei genauer Kreisform sind sie latent; erst durch eine vorhandene Deformation kommen sie zur Wirkung, verstärken sie und sich bis zur Bildung eines neuen Gleichgewichtszustandes, der aber jenseits der erlaubten Gestaltsänderung liegen kann.

Diese Wandlungen sollen im Nachfolgenden untersucht werden. Zunächst wollen wir uns mit den Kräften selbst befassen, Abschnitt I; dann soll der allgemeine mathematische Zusammenhang zwischen deren Biegungsmoment und der radialen Deformation aufgestellt und dessen Anwendung ohne Zuziehung magnetischer Zugkräfte erläutert werden, Abschnitt II; hierauf sollen auch diese eingeführt, die allgemeinste Gleichung unseres Problems gelöst und die praktisch wichtigen Fälle spezifiziert werden; es folgt die Durchrechnung an ausgeführten Maschinen, Abschnitt III; zum Schluß, in Teil IV, soll die Dynamik des Problems skizziert werden.

I.

Um die magnetischen Zugkräfte analytisch zu fassen, bedürfen wir der Magnetisierungskurve, d. i. der E. M. K. der Maschine als Funktion des Erregerstromes bei Leerlauf (Fig. 1).

Ist H_x die Kraftliniendichte pro Quadratzentimeter an irgend einer Stelle x der Polteilung im Luftraum, so ist der magnetische Zug nach der Formel von Maxwell:

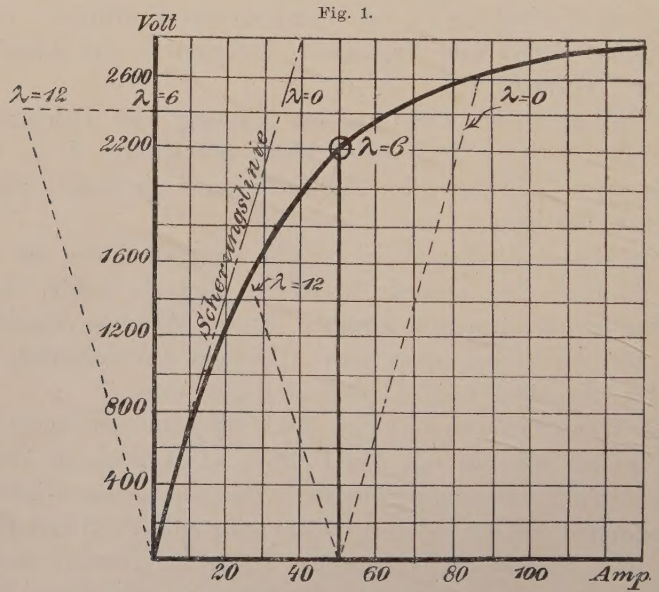
$$(1) \qquad Z_x = \frac{H_x^2}{24{,}7 \cdot 10^5} = \left(\frac{H_x}{5000}\right)^2 \text{kg/qcm.}$$

Ist die Kurve der H_x über die Polteilung τ gegeben, dann ist, wenn H_{eff} den effektiven Mittelwert der H_x-Kurve bedeutet, der mittlere Zug Z' pro qcm Gehäusebohrung:

$$Z' = \left(\frac{H_{eff}}{5000}\right)^2 = \frac{1}{5000^2}\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} H_x^2 dx \text{ kg/qcm.}$$

Die Abhängigkeit dieser mittleren Kraftlinienspannung vom Luftraum ist gegeben durch die Entstehung der Magnetisierungskurve (Fig. 1).

Fig. 1.



Die Tangente im Nullpunkt, die sogenannte Scherungslinie, trennt die Amperewindungen für Luft und Eisen.[1]) Eine Parallele zur Scherungslinie durch den Abszissenpunkt des normalen Erregerstromes gibt die Spannung und die damit proportionale Kraftliniendichte H_{eff} für den Luftraum = 0, eine symmetrisch dazu liegende Gerade die gleichen Größen für den doppelten Luftraum an. Sinngemäß sind dazwischen-

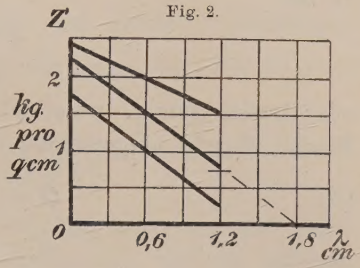
1) Falls auf die Vermehrung der primären Streuung mit der zunehmenden Sättigung des Eisens keine Rücksicht genommen wird.

liegende Punkte zu konstruieren. Mit der so bestimmten effektiven Kraftliniendichten H_{eff} werden die zugehörigen mittleren magnetischen Züge $Z' = \left(\frac{H_{eff}}{5000}\right)^2$ kg/qcm im Luftraum berechnet und graphisch in Abhängigkeit vom Luftraum aufgetragen. (Fig. 2).

Wäre diese Kraftkurve beliebig gekrümmt, so würde es für unsre Untersuchungen vollauf genügen, eine Tangente im Normalpunkte zu ziehen und diese als Kraftgesetz anzunehmen, da wir ja nur kleine Deformationen zulassen; durch die bei modernen Maschinen gebotene Sättigung des Eisens sind wir aber in der günstigen Lage, als Satz aufzustellen:

Die Kraftkurve ist mit genügender Genauigkeit weit über die zulässige Deformation hinaus durch eine gerade Linie darstellbar.

Fig. 2.



oder analytisch formuliert:

$$Z' = Z'_0 - \zeta' p \text{ kg/qcm},$$

wobei p die radiale Deformation in cm ist, positiv, wenn nach außen gerichtet. Die Größen Z'_0 ζ' erklären sich von selbst durch Betrachtung der Figur 2; es ist da für die mittlere Kurve:

$$Z' = 1,5 - 1,22p \text{ kg/qcm}.$$

Im Normalpunkt der Magnetisierungskurve ist für 2200 V 50 A und einseitigen Luftraum $\lambda = 6$ mm, $H_{eff} = 6150$ Kraftlinien pro qcm.

Die beiden andern eingezeichneten Kurven zeigen, wie wenig der Charakter der geraden Linie durch einen anderen Sättigungszustand des Eisens beeinflußt wird.[1]) Der Faktor ζ' tritt in den nachfolgenden Rechnungen vorwiegend auf, weil er die Änderung der magnetischen Zugkraft mit dem Luftraum angibt. Wir stellen die Resultate der drei Kurven zusammen:

Ampere	Kurve	ζ' (kg cm^{-3})
80	obere	0,8
50	mittlere	1,22
30	untere	1,22.

Ähnliche Verhältnisse gelten für alle Magnetisierungskurven gleichen Charakters.

1) Vergl. Arnold, Wechselstromtechnik, Bd. IV, p. 252 ff.

Da wir alle Kräfte auf 1 cm Umfang zurückführen, haben wir den mittleren magnetischen Zug Z' noch mit der Blechpaketbreite l cm zu multiplizieren:

$$Z = Z'l = Z_0'l - q\xi' l = Z_0 - p\xi \text{ kg/cm}. \tag{2}$$

Nun sind noch das Eigengewicht und die Torsionskraft in kg pro cm Umfang auszudrücken.

Es sei γ = Eigengewicht in kg pro cm Umfang, Q Gewicht des gesamten Gehäusebogens in kg, D Schwerpunktsdurchmesser in cm, so ist:

$$\gamma = \frac{Q}{D\pi} \text{ kg/cm},$$

oder genau genug, wenn F in qcm der mittlere Querschnitt (Eisen, Bleche, Kupfer eingerechnet):

$$Q = D\pi F\, 7{,}8\, 10^{-3} \text{ kg}; \tag{3}$$

$$\gamma = F \cdot 7{,}8\, 10^{-3} \text{ kg/cm}.$$

Ähnlich gilt, wenn τ die Tangentialkraft in kg/cm, Kw die Leistung der Maschine in Kilowatt und η der Wirkungsgrad ist:

$$\tau = \frac{Kw\, 716{,}2 \cdot 100^{-2}}{\eta \cdot 0{,}736\, n \frac{D}{2} D} = 6{,}2 \frac{Kw}{\eta\, n\, D_m^2} \text{ kg/cm}. \tag{4}$$

D in $m = D_m$; n = Umläufe/min./min.

Damit haben wir alle auf Biegung wirkende Kräfte in Kilogramm pro Zentimeter Umfang ausgedrückt.

II.

Es sei:

ϱ_k = Krümmungsradius der deformierten Kurve in cm,

r = Schwerpunktsradius des Gehäusequerschnitts in cm = $\frac{D}{2}$,

Θ = Trägheitsmoment des Gehäusequerschnitts in cm^4,

F' = tragfähiger Gehäusequerschnitt in qcm,

M = Biegungsmoment der äußeren Kräfte rechts vom Schnitt in kg cm, und zwar positiv, wenn rechtsdrehend,

εt = spezifische Dehnung durch Erwärmung, $\varepsilon = \frac{1}{80000}$ = Ausdehnungskoeffizient des Gußeisens, $t^0 C$ dessen Temperaturzunahme,

E = Elastizitätsmodul des Gehäusequerschnitts in kg/qcm,

so ist nach einem Satz der Festigkeitslehre über gekrümmte stabförmige Körper

$$\frac{1}{\varrho_k} = \frac{1}{r} + \frac{M}{E\Theta} - \frac{\varepsilon t}{r}. \quad (5)$$ [1])

Es seien ϱ und φ die Polarkoordinaten eines Punktes der deformierten Kurve, auf das Mittel des ursprünglichen Kreises als Nullpunkt bezogen, p die radiale Deformation in cm, positiv, wenn nach außen gerichtet, so ist:

$$\varrho = r + p.$$

Wenn $\varrho' = \frac{d\varrho}{d\varphi}$, $\varrho'' = \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}$ die ersten und zweiten Ableitungen von ϱ nach φ bedeuten, so gilt nach einem bekannten Satz der Kurvengeometrie die Beziehung:

$$\frac{1}{\varrho_k} = \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}} + \frac{\varrho'^2 - \varrho\varrho''}{(\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2})^3}.$$

Genau wie bei der Theorie der elastischen Linie gerader Stäbe werden die Formänderungen so klein vorausgesetzt, daß die höheren Potenzen der radialen Deformation p und deren Ableitungen, sowie ihre Produkte miteinander gegenüber den linearen Größen zu vernachlässigen sind; dann haben wir, da:

$$\varrho = r + p, \quad \varrho' = p' = \frac{dp}{d\varphi}, \quad \varrho'' = p'' = \frac{d^2p}{d\varphi^2},$$

$$\frac{1}{\varrho_k} = \frac{1}{r+p} - \frac{p''}{r^2} = \frac{1}{r} + \frac{M}{E\Theta} - r\varepsilon t,$$

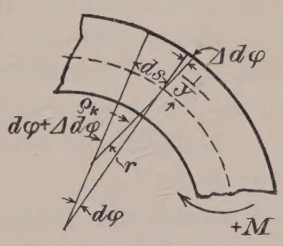
---

1) Die Formel soll hier kurz abgeleitet werden. Es ist nach nebenstehender Figur 3, wenn σ die Spannung in kg/qcm:

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{y\Delta d\varphi}{ds} = \frac{My}{E\Theta}; \quad \left(\sigma = \frac{My}{\Theta} \text{ Biegungsmomenten-formel}\right)$$

$$\Delta d\varphi = \frac{M ds}{E\Theta}.$$

Fig. 3.



Ferner ist:

$$\frac{d\varphi + \Delta d\varphi}{ds} = \frac{1}{\varrho_k}; \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{r} \text{ (Kreis)},$$

$$\frac{d\varphi + \Delta d\varphi}{ds} = \frac{1}{\varrho_k} = \frac{1}{r} + \frac{M}{E\Theta}.$$

Infolge der Erwärmung der Maschine werden die Strecken auf das $1 + \varepsilon t$fache vergrößert, ohne daß die Winkel sich ändern; also muß die rechte Seite der letzten Gleichung noch mit $1 + \varepsilon t$ dividiert oder unter Vernachlässigung sehr kleiner Größen zweiter Ordnung mit $1 - \varepsilon t$ multipliziert werden; die wahre Krümmung ist dann:

$$\frac{1}{\varrho_k} = \frac{1}{r} + \frac{M}{E\Theta} - \frac{\varepsilon t}{r},$$

was zu beweisen war.

oder da:

$$\frac{1}{r+p} - \frac{1}{r} = -\frac{p}{r^2},$$

$$p + p'' = -\frac{Mr^2}{E\Theta} + r\varepsilon t \text{ (cm)}. \tag{6}$$

Dies ist die Fundamentalgleichung unserer Aufgabe.

Die Länge der deformierten Linie darf sich nur um die Ausdehnung durch die Erwärmung vom ursprünglichen Kreisumfang unterscheiden; daher ist als zusätzliche Bedingung zu erfüllen (dl = Bogenelement):

$$\int dl - \int r\,d\varphi = \int (r+p)\,d\varphi - \int r\,d\varphi = \int p\,d\varphi = \int r\varepsilon t\,d\varphi. \tag{7}$$

Lassen wir infolge ungenauer Montage eine kleine vertikale Senkung gleich s zu, so lautet die Kreisgleichung nicht mehr $\varrho = r$, sondern $\varrho = r - s\cos\varphi$, und aus Gleichung (7) wird bei Symmetrie der deformierten Kurve zur Nullachse:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dl - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r - s\cos\varphi)\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} p\,d\varphi + s = r\varepsilon t\frac{\pi}{2}. \tag{7a}$$

Bevor wir diese Gleichungen anwenden, müssen wir über die Auflagerungsbedingungen der oberen Gehäusehälfte entscheiden, die ja hauptsächlich gefährdet ist, ferner welche Normalkräfte senkrecht zum Querschnitt wir berücksichtigen wollen. Bezüglich letzterer tragen wir nach, daß die Ausdehnung infolge Erwärmung durch die elektrischen Verluste die Wirkung aller anderen Normalkräfte um ein Vielfaches überwiegen, die Normalkomponenten der Schwere und magnetischen Zugkräfte erreichen nur wenige Prozente der Formänderung durch Erwärmung. Da es sich bei den Normalkräften ohnehin nur um eine Korrektur handelt, haben wir von vornherein nur die Erwärmung in Betracht gezogen.

Bezüglich der Auflagerungsbedingungen unterscheiden wir folgende vier Fälle:

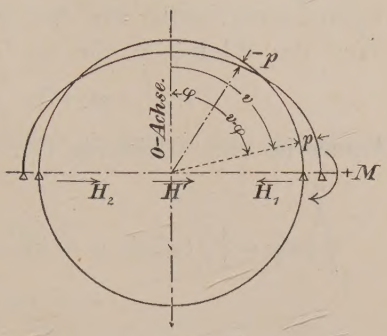
I. Gleiten und Drehen ist möglich, d. i. die Auflagerflächen können sich horizontal frei verschieben und außerdem um einen beliebigen Winkel drehen.

II. Gleiten möglich, Drehen unmöglich, die freie Verschiebbarkeit der Enden ist gewahrt, die freie Drehung der Enden ist aufgehoben.

III. Gleiten unmöglich, Drehen möglich, die Enden sind fest, können sich aber wie in Gelenken drehen.

IV. Gleiten und Drehen unmöglich, die Enden sind starr eingespannt. Wie können nun diese Auflagerbedingungen[1]), insbesondere die Kräftepaare, die das Drehen in Fall II und IV verhindern, verwirklicht werden? Die Momente können, wenigstens solange sie negativ oder linksdrehend sind, stets durch das Fundament eingeleitet werden, wenn man das Gehäuse außerhalb des Schwerpunktes der Auflagerfläche im Abstand $\pm w$ cm lagert; dadurch wird ein Moment $\mp wP$ erzeugt, wenn P der Druck auf die Stützfläche in kg ist.

Fig. 4.



Wir betrachten die obere Gehäusehälfte zunächst nur unter dem Einfluß des Eigengewichts und der Erwärmung und rechnen hierfür alle vier Fälle durch. Das Moment der Schwere rechts vom Schnitt ist (Fig. 4):

$$\text{Moment der Bogenelemente} = M_1.$$

$$M_1 = r^2\gamma \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} dv\,(\sin v - \sin\varphi) = r^2\gamma\,(-\cos v - v\sin\varphi)_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$M_1 = r^2\gamma\left(\cos\varphi - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\sin\varphi\right) \text{ kg cm}.$$

$$\text{Moment des Auflagerdruckes} = M_2.$$

$$M_2 = -\,r^2\gamma\,\frac{\pi}{2}\,(1 - \sin\varphi) \text{ kg cm}.$$

Das resultierende Moment der Schwere ist:

$$(8) \qquad M_\gamma = r^2\gamma\left[\cos\varphi - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\sin\varphi - \frac{\pi}{2}\,(1 - \sin\varphi\right] \text{ kg cm}.$$

Unsere Gleichung für den Fall I, vollkommene Freiheit der Enden, lautet nun:

$$p + p'' = \frac{r^4\gamma}{E\Theta}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\sin\varphi - \cos\varphi + \frac{\pi}{2}\,(1 - \sin\varphi)\right] + r\varepsilon t$$

und deren Lösung nach einigem Probieren[2]):

$$p = \frac{r^4\gamma}{4\,E\Theta}\,(\varphi^2\cos\varphi - 3\varphi\sin\varphi + 2\pi) + r\varepsilon t + a\cos(\varphi + \alpha).$$

1) Vergl. Dr. Ing. Julius Schenk, Festigkeitsberechnung größerer Drehstrommaschinen. Teubner 1903.

2) Kann wie alle Integrale von Differentialgleichungen durch Einsetzen in die Grundbeziehung geprüft werden.

a und α sind die beiden Integrationskonstanten. Wir setzen den Wert $\frac{r^4\gamma}{E\Theta}$ künftig immer gleich k.

Die elastische Linie ist offenbar symmetrisch, d. h. p, die radiale Deformation, besitzt für den gleichen aber positiven oder negativen Wert des Winkels φ dieselbe Größe; deshalb muß sein für

$$\varphi = 0; \quad p' = 0; \quad \alpha = 0;$$

Ferner ist nach Gleichung (7):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} p\,d\varphi = \left\{\frac{k}{4}(\varphi^2 \sin\varphi + 5\varphi\cos\varphi - 5\sin\varphi + 2\pi\varphi) + a\sin\varphi\right\}_0^{\frac{\pi}{2}} + r\varepsilon t\frac{\pi}{2} = r\varepsilon t\frac{\pi}{2}.$$

Folglich muß der Klammerausdruck zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gleich null sein; daraus bestimmt sich die Integrationskonstante:

$$a = -\frac{k}{4}\left(\frac{\pi^2}{4} - 5 + \pi^2\right) = -\frac{k}{4}\,7{,}34 \text{ (cm)}.$$

Damit lautet die Schlußgleichung:

$$(9) \quad p = \frac{k}{4}(\varphi^2\cos\varphi - 3\varphi\sin\varphi + 2\pi - 7{,}34\cos\varphi) + r\varepsilon t \text{ (cm)}$$

Die Einsenkung e am höchsten Punkt des Gehäuses ist, wenn $\varphi = 0$ gesetzt wird:

$$e = -0{,}25\,k + r\varepsilon t \text{ (cm)}.$$

Im zweiten Fall, auf dessen Berechnung wir nun eingehen, können sich die Auflagerpunkte horizontal frei verschieben, der rechte Winkel mit der Horizontalen bleibt jedoch erhalten. Dazu muß das Fundament auf die Stützflächen ein Kräftepaar M' übertragen, das der Bedingung:

$$p' = \frac{dp}{d\varphi} = 0 \quad \text{für} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

zu genügen hat. Unsere Gleichungen lauten nunmehr:

$$p + p'' = k\left[\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\sin\varphi - \cos\varphi + \frac{\pi}{2}(1 - \sin\varphi)\right] - \frac{M' r^2}{E\Theta} + r\varepsilon t,$$

$$p = \frac{k}{4}(\varphi^2\cos\varphi - 3\varphi\sin\varphi + 2\pi) - \frac{M' r^2}{E\Theta} + r\varepsilon t + a\cos(\varphi + \alpha),$$

$\alpha = 0$ der Symmetrie wegen, wie vorhin.

$$p' = -\frac{k}{4}(\varphi^2\sin\varphi + \varphi\cos\varphi + 3\sin\varphi) - a\sin\varphi = 0 \quad \text{für} \quad \varphi = \frac{\pi}{2},$$

hieraus:

$$a = -\frac{k}{4} \cdot 5{,}47 = -\frac{k}{4}\left(\frac{\pi^2}{4} + 3\right),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} p\,d\varphi = \left[\frac{k}{4}(\varphi^2 \sin\varphi + 5\varphi\cos\varphi - 5\sin\varphi + 2\pi\varphi) + a\sin\varphi - \frac{M' r^2 \varphi}{E\Theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$+ r\varepsilon t\,\frac{\pi}{2} = r\varepsilon t\,\frac{\pi}{2}.$$

Hieraus folgt, wenn der Klammerausdruck zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gleich null gesetzt wird,

$$M' = 0{,}3\, r^2 \gamma \text{ kg cm}.$$

Nach Einsetzung aller Werte ist:

$$(10)\quad p = \frac{k}{4}(\varphi^2\cos\varphi - 3\varphi\sin\varphi - 5{,}47\cos\varphi + 5{,}09) + r\varepsilon t \text{ (cm)},$$

hieraus für $\varphi = 0$

$$e = -0{,}09k + r\varepsilon t \text{ (cm)}.$$

Im Falle III sind die Enden fest, jedoch drehbar. Durch das Fundament muß ein Horizontalschub H übertragen werden, der die freie Verschieblichkeit der Auflagerflächen aufhebt; zum Moment der Schwere kommt daher $+ Hr\cos\varphi$ hinzu und an Stelle von $r\varepsilon t$ tritt in Gleichung (6) und (7) $r\varepsilon t - \frac{rH}{EF'}\cos\varphi$ und in (7a) $r\varepsilon t\frac{\pi}{2} - \frac{rH}{EF'}$. Setzen wir $\vartheta = \sqrt{\frac{\Theta}{F'}}$ gleich dem Trägheitsradius des Gehäusequerschnitts, so lautet die Lösung des Falles III:

$$p = \frac{k}{4}(\varphi^2\cos\varphi - 3\varphi\sin\varphi + 2\pi) - \frac{r^3 H}{E\Theta}\,\varphi\,\frac{\sin\varphi}{2}\left(1 + \frac{\vartheta^2}{r^2}\right) + r\varepsilon t + a\cos\varphi.$$

Nun ist der Trägheitsradius ϑ gegenüber dem Schwerpunktsradius r bei großen Maschinen stets eine sehr kleine Zahl, umsomehr $\left(\frac{\vartheta}{r}\right)^2$, so daß wir es gegen Zahlen gleich oder größer als Eins vernachlässigen dürfen; dann erhalten wir für den Horizontalschub H und die Integrationskonstante a folgende Gleichungen:

$$1)\quad \varphi = \frac{\pi}{2},\quad p = 0 \quad \text{(die Enden sind fest)};$$

hieraus

$$H = \frac{r\gamma}{2} + \frac{\vartheta^2}{r^2}\,\frac{4}{\pi}\,EF'\varepsilon t \text{ kg},$$

$$2)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} p\,d\varphi = r\varepsilon t\,\frac{\pi}{2} - \frac{rH}{EF'},$$

hieraus

$$a = -\frac{k}{4}\,6{,}3370 + \frac{2}{\pi}\,r\varepsilon t.$$

Nach allen Vereinfachungen erscheint:

$$(11)\qquad \begin{cases} p = \frac{k}{4}\,(\varphi^2\cos\varphi - 4\varphi\sin\varphi + 2\pi - 6{,}3370\cos\varphi) \\ \qquad - r\varepsilon t\left(\frac{2}{\pi}\,(\varphi\sin\varphi - \cos\varphi) - 1\right) \end{cases}$$

und die Einsenkung e für $\varphi = 0$ wird:

$$e = -\,0{,}0135\,k + 1{,}637\,r\varepsilon t\ \text{(cm)}.$$

Im Falle IV sind die Enden starr eingespannt; durch das Fundament wird ein Kräftepaar M' und ein Horizontalschub H übertragen, die jedes Drehen und Gleiten verhindern; die Fälle II und III überlagern sich. Zur Bestimmung der Unbekannten haben wir drei Gleichungen:

1) $\varphi = \frac{\pi}{2}, p = 0$ (Enden fest), 2) $\varphi = \frac{\pi}{2}, p' = 0$ (Enden nicht drehbar),

$$3)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} p\,d\varphi = r\varepsilon t\,\frac{\pi}{2} - \frac{rH}{EF'}.$$

Die genauere Durchführung der Rechnung ist nach Behandlung der Fälle I—III nicht mehr nötig; wir geben das Resultat:

$$(12)\qquad \begin{cases} p = \frac{k}{4}\,(\varphi^2\cos\varphi - 4{,}2790\,\varphi\sin\varphi - 6{,}7464\cos\varphi + 6{,}7214) \\ \quad + r\varepsilon t(5{,}2788 - 3{,}3607\,(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi))\ \text{(cm)}, \end{cases}$$

$$M' = -\,r^2\gamma\,0{,}1095 + \frac{\vartheta^2}{r^2}\,rEF'\varepsilon t\,4{,}2788\ \text{(kg cm)},$$

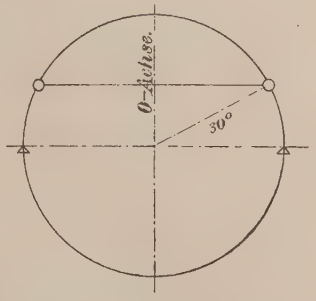
$$H = r\gamma\,0{,}6395 + \frac{\vartheta^2}{r^3}\,EF'\varepsilon t\ \text{(kg)},$$

$$e = -\,0{,}0063\,k + 1{,}918\,r\varepsilon t\ \text{(cm)}.$$

Zum Schluß wollen wir noch den Fall Fig. 5 behandeln; in der horizontalen Querstange tritt ein solcher Zug auf, daß die Einsenkung am höchsten Punkt zu null wird. Die Auflagerstellen können sich wie im Fall I horizontal frei bewegen und um einen beliebigen Winkel drehen. Für diesen ungünstigsten Fall soll die Rechnung durchgeführt werden. Die Spannung in der Zugstange sei T kg.

Die elastische Linie zerfällt in zwei Äste, die ohne Knick ineinander übergehen; der erste Ast reicht von 0^0 bis 60^0, der zweite von 60^0 bis 90^0. Wir haben pro Ast zwei Integrationskonstanten und außerdem die Stabspannung T, im ganzen also fünf Unbekannte. Hierfür haben wir auch fünf Gleichungen, nämlich:

Fig. 5.



I. Ast: 1) für $\varphi = 0$, $p' = 0$, weil die Symmetrie zur Nullachse erhalten bleibt,

2) für $\varphi = 0$, $p = 0$ nach Voraussetzung.

I. und II. Ast: für $\varphi = \frac{\pi}{3}$,

3) $p_{\mathrm{I}} = p_{\mathrm{II}}$, 4) $p'_{\mathrm{I}} = p'_{\mathrm{II}}$, weil beide Äste kontinuierlich ineinander übergehen.

Ferner gilt die allgemeine Gleichung:

$$5) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} p\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{3}} p_{\mathrm{I}}\,d\varphi + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} p_{\mathrm{II}}\,d\varphi = r\varepsilon t\,\frac{\pi}{2}.$$

Unsere Gleichungen lauten:

$$\mathrm{I} \quad p + p'' = +k\left[\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\sin\varphi - \cos\varphi + \frac{\pi}{2}(1 - \sin\varphi\right] - Tr(\cos\varphi - 0{,}5) + r\varepsilon t$$

$$\text{für } 0 < \varphi < \frac{\pi}{3},$$

$$\mathrm{II} \quad p + p'' = +k\left[\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\sin\varphi - \cos\varphi + \frac{\pi}{2}(1 - \sin\varphi\right] + r\varepsilon t$$

$$\text{für } \frac{\pi}{3} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Hieraus folgen für beide Äste folgende Beziehungen:

$$(13) \quad \begin{cases} \text{I. Ast: } p = \frac{k}{4}[\varphi^2\cos\varphi - 3\varphi\sin\varphi + 2\pi] - \frac{Tr^3}{2E\Theta}(\varphi\sin\varphi - 1) \\ \qquad + r\varepsilon t + a\cos(\varphi + \alpha)\ (\mathrm{cm}), \end{cases}$$

$$p' = -\frac{k}{4}(\varphi^2\sin\varphi + \varphi\cos\varphi + 3\sin\varphi) + \frac{Tr^3}{2E\Theta}(\varphi\cos\varphi + \sin\varphi) - a\sin(\varphi + \alpha),$$

$$\int p\,d\varphi = \frac{k}{4}(\varphi^2\sin\varphi + 5\varphi\cos\varphi - 5\sin\varphi + 2\pi\varphi) + \frac{Tr^3}{2E\Theta}(\varphi\cos\varphi - \sin\varphi + \varphi) + r\varepsilon t\varphi + a\sin(\varphi + \alpha).$$

Die Gleichungen für den zweiten Ast entwickeln sich aus der gegegebenen durch Weglassung des Ausdruckes mit der Stabspannung T; an die Stelle von a und α treten die Integrationskonstanten b, β.

Damit sind alle Vorarbeiten zur Aufstellung der obigen fünf Bedingungsgleichungen erledigt. Wir lassen diese rein rechnerischen Operationen weg und geben die Resultate der Elimination der fünf Unbekannten aus den fünf Gleichungen.

$$1)\ \text{Stabspannung}\ T = 1{,}22\, r\gamma - 4{,}54\, \frac{\vartheta^2}{r^2}\, EF'\varepsilon t\ \text{(kg)},$$

$$2)\ \alpha = 0, \qquad 3)\ a = -2{,}18\, k + 1{,}27\, r\varepsilon t,$$

$$4)\ b\cos\beta = -1{,}41\, k - 1{,}59\, r\varepsilon t, \qquad 5)\ b\sin\beta = +0{,}36\, k - 1{,}41\, r\varepsilon t.$$

Auf die zweite Dezimale sind die Rechnungen nicht mehr genau.

Es folgt eine Zusammenstellung der bisher erhaltenen Resultate. M' bedeutet das Moment an den Auflagerflächen, M_0 das Moment im Scheitel der oberen Gehäusehälfte.

Fall	I Drehen möglich, Gleiten möglich	II Drehen unmöglich, Gleiten möglich
e	$-0{,}2635\, k + r\varepsilon t$	$-0{,}0936\, k + r\varepsilon t$
M_0	$-0{,}5708\, r^2\gamma$	$-0{,}2732\, r^2\gamma$
M'	0	$+0{,}2976\, r^2\gamma$
H	0	0

Fall	III Drehen möglich, Gleiten unmöglich	IV Drehen unmöglich, Gleiten unmöglich
e	$-0{,}0135\, k + 1{,}6366\, r\varepsilon t$	$-0{,}0063\, k + 1{,}9181\, r\varepsilon t$
M_0	$-0{,}071\, r^2\gamma + \frac{\vartheta^2}{r^2}\, EF'r\varepsilon t \cdot 1{,}273$	$-0{,}041\, r^2\gamma - \frac{\vartheta^2}{r^2}\, EF'r\varepsilon t \cdot 4{,}28$
M'	0	$-0{,}1095\, r^2\gamma - \frac{\vartheta^2}{r^2}\, EF'r\varepsilon t \cdot 4{,}28$
H	$+0{,}5\, r\gamma + 1{,}27\, \frac{\vartheta^2}{r^2}\, EF'\varepsilon t$	$+0{,}64\, r\gamma + 6{,}72\, \frac{\vartheta^2}{r^2}\, EF'\varepsilon t$

Die Tabelle besagt, daß die Einsenkungen durch die Schwere sehr rasch abnehmen, wenn das Gehäuse gut fundamentiert wird. Im Falle III mit festen, jedoch drehbaren Enden beträgt sie nur 5 % der Durchsenkung im Falle I mit frei verschieblichen und drehbaren Enden.[1])

1) Immerhin muß der Konstrukteur auf den ungünstigsten Fall I Rücksicht nehmen, denn die provisorische Aufstellung einer Maschine im Prüffeld ist jedenfalls weit entfernt von der Solidität der stationären Aufstellung.

Bei einer 1200 Kw Maschine für 125 Umläufe/min. war $r = 232$ cm $\Theta = 20 \cdot 10^4$ cm^4 $\gamma = 10{,}5$ kg/cm $E = 10^6$ kg/qcm, hieraus folgt $k = \frac{r^4 \gamma}{E \Theta} = 0{,}16$ cm und für $\varepsilon = \frac{1}{80000}$ (Ausdehnungskoeff. von Gußeisen) $t = 35^0$ C ist $r \varepsilon t = 0{,}1$ cm. Mit diesen Zahlen ergibt sich im Fall III eine Durchsenkung $e = -0{,}0135 \cdot 0{,}16 + 1{,}64 \cdot 0{,}1 = +0{,}16$ cm, d. h. sogar eine Hebung des Scheitels infolge der Erwärmung. Doch besteht diese Zahl nur zum Teil zu recht; denn das Polrad dehnt sich durch Erwärmung und Fliehkraft ebenfalls aus und sucht diesen Zuwachs einzuholen. Auch wird man niemals eine Luftraumdifferenz von 1,6 mm zulassen, sondern das Gehäuse im warmen Zustande einstellen; dadurch fallen aber die Temperaturspannungen während des Betriebes fort, und die Schwere und die magnetischen Zugkräfte, zu denen wir jetzt übergehen, treten in den Vordergrund.

III.

Die Tangential- und die magnetischen Zugkräfte sind nunmehr in die Gleichung einzuführen.

Das Biegungsmoment der an den Bogenelementen angreifenden Tangentialkräfte rechts vom Schnitt ist (vergl. Fig. 4):

$$M_1 = + r^2 \tau \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} dv \, (1 - \cos (v - \varphi)) = r^2 \tau \left(\frac{\pi}{2} - \varphi - \cos \varphi \right),$$

des Auflagerdruckes a:

$$a \cdot 2r = r \cdot r \pi \tau$$

$$M_2 = - r^2 \frac{\pi}{2} \tau \, (1 - \sin \varphi),$$

des Horizontalschubes h:

$$h = r \tau \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi,$$

$$M_3 = + r^2 \tau \cos \varphi.$$

Das resultierende Moment $M_\tau = M_1 + M_2 + M_3$ der Tangentialkräfte lautet:

(14) $$M_\tau = \pm r^2 \tau \left(\frac{\pi}{2} \sin \varphi - \varphi \right) \text{ (kg cm)}.$$

Das +-Zeichen gilt für Rechtslauf, das —-Zeichen für Linkslauf des Magnetrades.

Das Moment der an den einzelnen Bogenelementen angreifenden magnetischen Zugkräfte ist unter Vernachlässigung der Vergrößerung des Hebelarmes durch die Deformation p mit demselben Recht, wie wir dies für die Schwere und Torsion getan haben (vergl. Fig. 4):

$$M_1 = r^2 \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} dv\, Z \sin(v - \varphi) = r^2 \left(Z_0 (1 - \sin\varphi) - \xi \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} p \sin(v - \varphi)\, dv \right).$$

Moment des Auflagerdruckes a:

$$a \cdot 2r = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} Z \cos\varphi\, d\varphi\,.$$

$$a = r \left(Z_0 - \tfrac{1}{2} \xi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} p \cos\varphi\, d\varphi \right) \text{(kg)}.$$

Wir setzen das konstante Integral:

$$\tfrac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} p \cos\varphi\, d\varphi = \mu$$

und haben

$$a = r(Z_0 - \xi\mu); \quad M_2 = -r^2(1 - \sin\varphi)(Z_0 - \xi\mu).$$

Moment des Horizontalschubes h:

$$h = \frac{r}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} Z \sin\varphi\, d\varphi = -\frac{r}{2} \xi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} p \sin\varphi\, d\varphi = -r\xi\nu,$$

wenn das konstante Integral

$$\tfrac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} p \sin\varphi\, d\varphi = \nu$$

gesetzt wird; das Moment M_3 selbst ist dann:

$$M_3 = -r^2 \xi\nu \cos\varphi.$$

Ist die elastische Linie symmetrisch zur Nullachse, d. h. hat p für denselben positiven oder negativen Winkel φ den gleichen Wert, so wird

$$\mu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} p \cos\varphi \, d\varphi$$

und

$$\nu = 0.$$

Das resultierende Moment $M_z = M_1 + M_2 + M_3$ der magnetischen Zugkräfte ergibt sich zu:

$$(15) \quad M_z = r^2\xi\left[-\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} p \sin(v-\varphi)\, dv + \mu\,(1-\sin\varphi) - \nu\cos\varphi \right].$$

Aus diesem Ausdruck folgt für $p = 0$, d. h. wenn die Kreisform erhalten bliebe, daß die magnetischen Zugkräfte gar keinen deformierenden Einfluß ausüben. Dies wurde schon eingangs erwähnt.

Der aufgestellte Ausdruck für das Biegungsmoment der magnetischen Zugkräfte ist in dieser Form analytisch unzugänglich, weil er die gesuchte Größe p unter dem Integralzeichen enthält; wir müssen vom Moment auf die Einzelkräfte übergehen, die es zusammensetzen, oder mathematisch formuliert sowohl die Funktion als die Grenzen des Integrals nach φ differentiieren. Wird diese Operation zweimal wiederholt, so erhält man:

$$M'' = \frac{d^2M}{d\varphi^2} = r^2\xi\left(-p + \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} p \sin(v-\varphi)\, dv + \mu\sin\varphi + \nu\cos\varphi \right).$$

Die Summe $M + M''$ beträgt:

$$M + M'' = r^2\xi(-p+\mu).$$

Dieselbe Summe ist für die Biegungsmomente der Schwere und Torsion zu bilden:

$$M_\gamma + M_\gamma'' = r^2\gamma\left(2\cos\varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$M_\tau + M_\tau'' = \mp r^2\tau\varphi.$$

Für das resultierende Moment aller Kräfte gilt:

$$(16) \quad M + M'' = r^2\xi(-p+\mu) + r^2\gamma\left(2\cos\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \mp r^2\tau\varphi.$$

Andererseits ist nach der Fundamentalformel:

$$-\frac{r^2}{E\Theta}(M + M'') = p + 2p'' + p'''' - r\varepsilon t.$$

Damit lautet die Differentialgleichung unseres Problems:

$$(17)\quad p + 2p'' + p'''' = \frac{r^4\zeta}{E\Theta}(p-\mu) - \frac{r^4\gamma}{E\Theta}\left((2\cos\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \pm \frac{r^4\tau}{E\Theta}\varphi + r\varepsilon t$$

oder, wenn wir setzen

$$m = \frac{r^4\zeta}{E\Theta},\quad k = \frac{r^4\gamma}{E\Theta},\quad w = \frac{r^4\tau}{E\Theta}:$$

$$(17a)\quad p + 2p'' + p'''' = m(p-\mu) - k\left(2\cos\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \pm w\varphi + r\varepsilon t$$

und deren Lösung mit den vier Integrationskonstanten A, a, B, b, wobei $\alpha = \sqrt{1+\sqrt{m}}$, $\beta = \sqrt{1-\sqrt{m}}$ bedeutet:

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} p = A\cos(\alpha\varphi + a) + B\cos(\beta\varphi + b) - \dfrac{m\mu}{1-m} + \dfrac{2k\cos\varphi}{m} \\ \qquad + \dfrac{k\frac{\pi}{2}}{1-m} \pm \dfrac{w\varphi}{1-m} + \dfrac{r\varepsilon t}{1-m}\ (\text{cm}). \end{array}\right.$$

Dieser Ausdruck ist die allgemeinste und umfassendste Lösung unserer Aufgabe für ein freitragendes Gehäuse auf Roll- und Kipplager. Er umfaßt die durch die Torsionskräfte hervorgerufene Unsymmetrie ebenso wie die Verzerrung der elastischen Linie infolge ungenauer einseitiger Montage.

Wie werden die Integrationskonstanten bestimmt? Hierfür können wir zunächst zwei Gleichungen angeben. Die erste, schon oft benützte, bezieht sich auf die Länge der elastischen Linie und lautet:

$$(7)\quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} p\,d\varphi = r\varepsilon t\pi,$$

die zweite drückt das Gleichgewicht gegen horizontale Verschiebung aus. Ist H_1 (Fig. 4, pag. 9) der Horizontalschub am rechten Ende, H_2 der am linken Ende und H' der Horizontalschub der äußeren Kräfte (Torsion, einseitige magnetische Züge), so ist die Gleichgewichtsbedingung:

$$H_2 - H_1 = H'.$$

Nun ist sehr nahe am rechten Ende das Moment $M_1 = +\,r\cos\varphi\,H_1$ und $\frac{dM_1}{d\varphi} = -\,r\sin\varphi\,H_1 = -\,rH_1$ für $\varphi = +\,\frac{\pi}{2}$, analog findet man für $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, $\frac{dM_2}{d\varphi} = +\,rH_2$; hieraus folgt: $\frac{dM_1}{d\varphi} + \frac{dM_2}{d\varphi} = r(H_2 - H_1) = rH'$. Substituiert man für die Biegungsmomente M_1, M_2 nach der Funda-

mentalgleichung die Deformationen p_1, p_2 für $\varphi = +\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, so wird die zweite Bedingungsgleichung für die Integrationskonstanten:

$$(19)\quad \frac{d}{d\varphi}(p_1 + p_1'' + p_2 + p_2'') = -\frac{r^3}{E\Theta}\left(1 + \frac{\vartheta^2}{r^2}\right) H' = -\frac{r^3}{E\Theta} H',$$

da, wie schon erwähnt, $\frac{\vartheta^2}{r^2}$ ein sehr kleiner Bruch ist.

Bei Symmetrie der elastischen Linie existiert kein Horizontalschub H' der äußeren Kräfte, und die vom Fundament übertragenen statisch unbestimmten Horizontalschübe H_1, H_2 werden einander gleich; obige Gleichung wird dann:

$$(20)\quad \frac{d}{d\varphi}(p + p'') = -\frac{r^3}{E\Theta} H \text{ für } \varphi = \pm\frac{\pi}{2};\ H_1 = H_2 = H.$$

Für die beiden noch übrigen Integrationskonstanten ergeben sich Gleichungen aus den Auflagerungsbedingungen Fall I bis IV, wie im zweiten Abschnitt.

Im nachfolgenden werden wir nur die leerlaufende Maschine betrachten d. h. $\tau = 0$ setzen; auch bei Vollbelastung ist τ immer wesentlich kleiner als γ. Ferner nehmen wir an, das Gehäuse sei symmetrisch montiert in bezug auf die Nullachse, so daß die Verzerrungen durch einseitige magnetische Züge verschwinden. In einem Fall werden wir eine kleine vertikale Senkung des Gehäuses zulassen, so daß durch die ungenaue Montage die magnetischen Zugkräfte an der gefährlichsten Stelle noch verstärkt werden. Noch allgemeinere Annahmen vermögen die Endresultate unserer Betrachtungen nicht wesentlich zu ändern.

Dann wird die elastische Linie symmetrisch zur Nullachse, d. h. die radiale Deformation p besitzt für denselben positiven oder negativen Wert von φ die gleiche Größe; dies ist aber nur möglich, wenn

$$a = 0 \quad \text{und} \quad b = 0$$

ist, so daß unsere Gleichung lautet:

$$p = A\cos\alpha\varphi + B\cos\beta\varphi - \frac{m\mu}{1-m} + \frac{k\frac{\pi}{2}}{1-m} + \frac{2k\cos\varphi}{m} + \frac{r\varepsilon t}{1-m}.$$

Da $\mu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} p\cos\varphi\, d\varphi$, $\nu = 0$ ist, folgt für μ der Wert

$$\mu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (A\cos\alpha\varphi + B\cos\beta\varphi)\, d\varphi - \frac{m\mu}{1-m} + \frac{k\frac{\pi}{2}}{1-m} + \frac{2k}{m}\frac{\pi}{4} + \frac{r\varepsilon t}{1-m}$$

oder

$$\frac{\mu}{1-m} = \frac{1}{\sqrt{m}}\left(-A\cos\alpha\frac{\pi}{2} + B\cos\beta\frac{\pi}{2}\right) + \frac{k\frac{\pi}{2}}{m(1-m)} + \frac{r\varepsilon t}{1-m}.$$

Setzt man diesen Wert in die obige Gleichung ein, so erscheint die engere Lösung:

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} p = {} & A\left(\cos\alpha\varphi + \sqrt{m}\cos\alpha\frac{\pi}{2}\right) + B\left(\cos\beta\varphi - \sqrt{m}\cos\beta\frac{\pi}{2}\right) \\ & + \frac{2k\cos\varphi}{m} + r\varepsilon t\ (\mathrm{cm}), \end{aligned}\right.$$

die uns weiterhin dienen wird.

Um aus ihr den Fall I, vollkommene Freiheit der Enden, herzustellen, verfügen wir über die Integrationskonstanten A und B so, daß kein Horizontalschub auftritt (s. Gleichung (20)):

$$\frac{d}{d\varphi}(p+p'') = 0 \text{ für } \varphi = \frac{\pi}{2};\quad A\alpha\sin\alpha\frac{\pi}{2} - B\beta\sin\beta\frac{\pi}{2} = 0.$$

Ferner besteht die Bedingungsgleichung (7a):

$$\int p\,d\varphi\,[+s] = r\varepsilon t\frac{\pi}{2};$$

$$A\left(\frac{\sin\alpha\frac{\pi}{2}}{\alpha} - \sqrt{m}\,\frac{\pi}{2}\cos\alpha\frac{\pi}{2}\right) + B\left(\frac{\sin\beta\frac{\pi}{2}}{\beta} + \frac{\pi}{2}\sqrt{m}\,\cos\beta\,\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2k}{m} + s + r\varepsilon t\frac{\pi}{2} = r\varepsilon t\frac{\pi}{2}.$$

Durch diese beiden Gleichungen sind die Integrationskonstanten A und B bestimmt. Als Endresultat folgt für den Fall I vollkommene Freiheit der Enden, wenn wir den Nenner:

$$(22)\qquad \Delta_1 = \frac{\operatorname{cotg}\alpha\frac{\pi}{2}}{\alpha} - \frac{\operatorname{cotg}\beta\frac{\pi}{2}}{\beta} - \frac{4}{\pi\sqrt{m}\,(m-1)}$$

setzen:

$$(22\mathrm{a})\quad p = \frac{2k}{m}\left\{\cos\varphi - \frac{1}{\Delta_1}\left(\frac{\cos\alpha\varphi}{\sqrt{m}\,\alpha\frac{\pi}{2}\sin\alpha\frac{\pi}{2}} + \frac{\cos\beta\varphi}{\sqrt{m}\,\beta\frac{\pi}{2}\sin\beta\frac{\pi}{2}} + \frac{\operatorname{cotg}\alpha\frac{\pi}{2}}{\alpha\frac{\pi}{2}} - \frac{\operatorname{cotg}\beta\frac{\pi}{2}}{\beta\frac{\pi}{2}}\right)\right\} + r\varepsilon t\ (\mathrm{cm}).$$

Bei verschwindenden magnetischen Zugkräften wird $m = 0$ und aus obiger Gleichung bei genauer Durchrechnung:

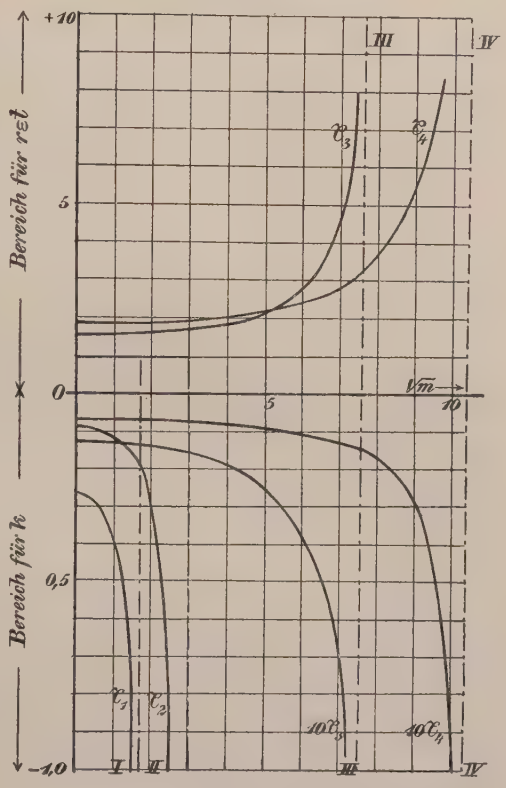
$$(9)\quad p = \frac{k}{4}(\varphi^2\cos\varphi - 3\varphi\sin\varphi - 7{,}34\cos\varphi + 2\pi) + r\varepsilon t\ (\mathrm{cm}).$$

Dieses Resultat ist nun schon bekannt als Gleichung (9); es war indessen nötig, den organischen Zusammenhang mit den früheren Entwicklungen zu zeigen.

Für eine vertikale Senkung s ist in Gleichung (22a) noch $-s \cdot \frac{1}{\Delta_1}(\cdots)$ dem Ausdruck unter runden Klammern bezw. für $m = 0$ $-s \cos \varphi$ hinzuzufügen.

Nun zur Diskussion unserer Gleichung. Es interessiert nur die Einsenkung des Scheitels der oberen Gehäusehälfte. Diese ist ersichtlich aus den Kurven I Fig. 6. Als Abszisse ist aufgetragen $\sqrt{m} = \sqrt{\frac{r^4 \zeta}{E \Theta}}$, als positive Ordinate ist aufgetragen der stets positive Faktor für die Ausdehnung durch Erwärmung, als negative Ordinate der entsprechende Faktor für die Schwere, so daß die gesamte Einsenkung ist: $e = (-c) k + (+c') r \varepsilon t$ (cm).

Fig. 6.



Im Falle I und II wird $(+c') = 1$, weil das Gehäuse der Ausdehnung frei folgen kann. Anders verhält es sich mit der Durchbiegung infolge der Schwere.

Für $\sqrt{m} = 1$ wird hier $(-c) = -0{,}4 =$ dem Werte der Kurve; für $\sqrt{m} > 1$ wird β imaginär und an Stelle der trigonometrischen Funktionen treten die hyperbolischen, also:

statt $+\beta \sin \beta\varphi$ tritt ein $-\beta' \sin h \beta' \varphi$, wobei $\beta' = \sqrt{\sqrt{m} - 1}$,

statt $+\frac{\sin \beta\varphi}{\beta}$ tritt ein $\frac{\sin h \beta' \varphi}{\beta'}$ wobei $\beta' = \sqrt{\sqrt{m} - 1}$.

Wir sehen, wie für steigendes $\sqrt{m} = \sqrt{\frac{r^4 \zeta}{E \Theta}}$, also für größere magnetische Zugkräfte oder auch schwächere Konstruktion die Ein-

senkung rasch wächst; ja sie wird unendlich für $\sqrt{m} = 1{,}7$, $m = 2{,}9$ oder genauer, wenn der Nenner:

$$\Delta_1 = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \frac{\pi}{2}}{\alpha} + \frac{\operatorname{cotg} h\beta' \frac{\pi}{2}}{\beta'} - \frac{4}{\pi \sqrt{m}\,(m-1)} = 0$$

wird. Gleichzeitig wird aber auch die zusätzliche Durchbiegung infolge der ungenauen Montage $+ s$ unendlich. Denn dieses Zusatzglied

$$- \frac{s}{\Delta_1} \left(\frac{\cos \alpha \varphi}{\sqrt{m}\, \alpha \frac{\pi}{2} \sin \alpha \frac{\pi}{2}} + \cdots \right)$$

hat, wie schon oben gezeigt wurde, denselben Nenner Δ_1.

Die Eigenschwere γ mag so klein sein, wie nur möglich; lediglich infolge ungenauer Montage kann das Gehäuse bei ungenügender Steifheit zusammenbrechen. Es wäre verkehrt, eine Konstruktion nur wegen ihrer größeren Leichtigkeit als stabiler zu betrachten; denn die Ungenauigkeiten der Montage werden ihr viel gefährlicher als die nur Bruchteile von Millimetern betragenden Durchsenkungen infolge der Eigenschwere. Jedoch ist die kritische Grenze für beide Fälle dieselbe, da es für die magnetischen Zugkräfte gleichgültig ist, auf welchem Wege die sie weckende ursprüngliche Deformation zustande kommt. Deshalb genügt es dem Sinne nach, die Schwerkräfte allein zu behandeln.

Wir wenden uns nun dem Fall II zu; das Gehäuse ist frei verschiebbar, jedoch nicht drehbar gelagert. Die Bestimmungsgleichungen sind genau wie im Abschnitt II. Nach einigen Reduktionen ist:

$$p = A\left(\cos \alpha\varphi + \sqrt{m} \cos \alpha \frac{\pi}{2}\right) + B\left(\cos \beta\varphi - \sqrt{m} \cos \beta \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2k \cos \varphi}{m} - \frac{M' r^2}{E\Theta} + r\varepsilon t,$$

$$\text{a)}\ p' = 0 \text{ für } \varphi = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{b)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p\, d\varphi = r\varepsilon t \frac{\pi}{2},$$

$$\text{a)}\ A\alpha \sin \alpha \frac{\pi}{2} + B\beta \sin \beta \frac{\pi}{2} + \frac{2k}{m} = 0,$$

$$\text{b)}\ A \frac{\sin \alpha \frac{\pi}{2}}{\alpha} + B \frac{\sin \beta \frac{\pi}{2}}{\beta} + A \frac{\pi}{2} \sqrt{m} \cos \alpha \frac{\pi}{2} - B \frac{\pi}{2} \sqrt{m} \cos \beta \frac{\pi}{2} + \frac{2k}{m} - \frac{M' r^2 \pi}{E\Theta 2} = 0.$$

Ferner ist ungeändert

$$c)\quad A\alpha \sin \alpha \frac{\pi}{2} - B\beta \sin \beta \frac{\pi}{2} = 0 .$$

Nach Elimination der Unbekannten $A\ B\ M'$ aus den Gleichungen a) b) c) und einigen Reduktionen ist:

$$(23)\quad p = \frac{2k}{m}\left\{\cos \varphi - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\cos \alpha\varphi}{\alpha \sin \alpha \frac{\pi}{2}} + \frac{\cos \beta\varphi}{\beta \sin \beta \frac{\pi}{2}} - \frac{4m}{\pi(m-1)}\right)\right\} + r\varepsilon t \ \text{(cm)}.$$

Für $m = 0$ wird:

$$p = \frac{k}{4}(\varphi^2 \cos \varphi - 3\varphi \sin \varphi - 5{,}47 \cos \varphi + 5{,}09) + r\varepsilon t \ \text{(cm)},$$

also Gleichung (10) in Abschnitt II.

Kurve II in Fig. 6 (S. 21) gibt den Verlauf der Einsenkung durch die Eigenschwere als Funktion von $\sqrt{m}$. Für $\sqrt{m} = 1$ wird der Biegungspfeil $e = -0{,}11\,k$; das schon Gesagte wiederholt sich; für

$$(23a)\qquad \Delta_2 = \alpha \sin \alpha \frac{\pi}{2} = 0,$$

was bei $\alpha = 2$, $\sqrt{m} = 3$, $m = 9$ eintritt, wird die kritische Grenze erreicht.

Jenseits $\sqrt{m} = 1{,}7$ im Fall I und $\sqrt{m} = 3$ im Fall II beginnen die praktisch belanglosen labilen Gleichgewichtszustände; sie finden ihr Analogon in der Knickbelastung gerader Stäbe mit frei drehbaren Enden, deren Knicklänge auch $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ der maximalen = Stablänge sein kann. Daß die in beiden Fällen unendlichen Durchbiegungen mathematisch abstrahiert sind und einen labilen Zustand bezeichnen, braucht wohl nicht hervorgehoben zu werden.

Um die kritischen Belastungen, dargestellt durch $\sqrt{m} = 1{,}7$, $m = 2{,}9$ und $\sqrt{m} = 3$, $m = 9$ auf elementarem Wege zu kontrollieren, nimmt man an, daß der ursprüngliche Kreis infolge der Deformation in eine horizontal ausgeweitete und vertikal abgeplattete Ellipse von der sehr kleinen Exzentrizität $= \varepsilon$ übergeht, und zwar ist dann:

$$p = -\varepsilon \cos 2\varphi; \quad \text{Einsenkung } e = -\varepsilon; \quad \text{Ausweitung } w = +\varepsilon;$$

Für diese *angenommene* Gleichung der elastischen Linie berechnet man das Biegungsmoment der magnetischen Zugkräfte nach dem bekannten Kraftgesetz:

$$(2)\qquad Z = Z_0 - p\zeta \ \text{kg/cm}.$$

Die Einsenkung e und Ausweitung w wird bestimmt nach den bekannten Formeln der Festigkeitslehre:

$$e = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M x\, ds}{E\Theta}; \quad w = +\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M y\, ds}{E\Theta} \quad (x \text{ u. } y \text{ Koord. von Bogenelement } ds);$$

diese Gleichungen enthalten die Exzentrizität ε der Ellipse. Wenn diese *angenommene* Exzentrizität aber gleich wird der entstehenden, d. i. $\varepsilon = -\frac{e+w}{2}$, so ist der labile Zustand oder die kritische Belastung vorhanden. ε hebt sich auf beiden Seiten weg, und man erhält für das minimale Trägheitsmoment:

$$\text{Annäherungsrechnung} \quad \text{I } \Theta > 0{,}37\,\frac{r^4\zeta}{E}, \quad \text{II } \Theta > 0{,}11\,\frac{r^4\zeta}{E},$$

$$\text{genaue Rechnung} \quad \text{I } \Theta > 0{,}35\,\frac{r^4\zeta}{E}, \quad \text{II } \Theta > 0{,}11\,\frac{r^4\zeta}{E}.$$

Die Übereinstimmung beider Methoden ist der Beweis für die Richtigkeit des Annäherungsverfahrens, der aber von vornherein ohne die genaue Rechnung nicht zu führen war.

Die Behandlung der Fälle III und IV schließt sich eng an die vorhergehenden Ausführungen und an die entsprechenden Lösungen im Abschnitt II an, die Bedingungsgleichungen für die Integrationskonstanten sind dieselben wie dort. Wir ersparen uns die detaillierte Durchführung der Rechnungen und geben gleich die Resultate zunächst für:

Fall III, Enden fest, jedoch drehbar gelagert:

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} p = \frac{2k}{m}\Bigg\{ &\cos\varphi - \frac{1}{\Delta_3}\left(\frac{\cos\alpha\varphi}{\cos\alpha\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{m}-1\right) - 2\sqrt{m} + \frac{\cos\beta\varphi}{\cos\beta\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{m}+1\right)\right)\Bigg\} \\ + r\varepsilon l\Bigg\{ &1 - \frac{1}{\Delta_3}\Bigg(\left(\frac{\cos\alpha\varphi}{\cos\alpha\frac{\pi}{2}} + \sqrt{m}\right)\left(\frac{\operatorname{tg}\beta\frac{\pi}{2}}{\beta} - \frac{\pi}{2}\sqrt{m}\right) \\ &- \left(\frac{\cos\beta\varphi}{\cos\beta\frac{\pi}{2}} - \sqrt{m}\right)\cdot\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha\frac{\pi}{2}}{\alpha} + \frac{\pi}{2}\sqrt{m}\right)\Bigg)\Bigg\}. \end{aligned}\right.$$

$$(24a)\qquad \Delta_3 = \frac{\operatorname{tg}\alpha\frac{\pi}{2}}{\alpha}\left(\sqrt{m}-1\right) + \frac{\operatorname{tg}\beta\frac{\pi}{2}}{\beta}\left(\sqrt{m}+1\right) - \pi\sqrt{m}.$$

$\Delta_3 = 0$ für $\sqrt{m} = 7{,}58$; $m = 57{,}55$ gibt die *kritische Grenze*.

Fall IV, Enden starr eingespannt gegen Gleiten und Drehen:

$$(25)\quad \left\{ p = \frac{2k}{m}\left\{\cos\varphi + \frac{1}{\Delta_4}\left(\frac{\cos\alpha\varphi - \cos\alpha\frac{\pi}{2}}{\alpha\frac{\pi}{2}\sin\alpha\frac{\pi}{2}}\cdot\left(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-1} + \frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{cotg}\beta\frac{\pi}{2}}{\beta}\right)\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \frac{\cos\beta\varphi - \cos\beta\frac{\pi}{2}}{\beta\frac{\pi}{2}\sin\beta\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+1} + \frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{cotg}\alpha\frac{\pi}{2}}{\alpha}\right)\right)\right\}\right.$$
$$\left. - \frac{r\varepsilon t}{\Delta_4}\left(\frac{\cos\alpha\varphi - \cos\alpha\frac{\pi}{2}}{\alpha\sin\alpha\frac{\pi}{2}} - \frac{\cos\beta\varphi - \cos\beta\frac{\pi}{2}}{\beta\sin\beta\frac{\pi}{2}}\right)\right.$$

$$(25a)\qquad \Delta_4 = \frac{\operatorname{cotg}\alpha\frac{\pi}{2}}{\alpha} - \frac{\operatorname{cotg}\beta\frac{\pi}{2}}{\beta} - \frac{4\sqrt{m}}{\pi(m-1)}.$$

$\Delta_4 = 0$ für $\sqrt{m} = 10{,}42$; $m = 108{,}5$ gibt die *kritische Grenze.*

Nun zur Diskussion der Fälle III und IV. Die Einsenkungen e sind in Fig. 6 als Kurven III und IV dargestellt, bei der Schwere der zehnfache Betrag, weil die Ordinaten, verglichen mit e_1 und e_2, sonst zu klein würden. Der allgemeine Charakter der Kurven bleibt erhalten; die kritischen Grenzen, dargestellt durch $\Delta_3 = 0$, $\Delta_4 = 0$, treten für $m = 57{,}55$, $\sqrt{m} = 7{,}58$ bezw. $m = 108{,}5$, $\sqrt{m} = 10{,}42$ ein. Die Ausdehnung durch Erwärmung ist in den Fällen III und IV nicht mehr frei, weil die Enden festgehalten werden. Daher tritt eine Hebung des Scheitels der oberen Gehäusehälfte ein; die magnetischen Zugkräfte verstärken jede Abweichung von der Kreisform im positiven oder negativen Sinn. Bei den angegebenen Belastungsgrenzen $\sqrt{m} = 7{,}58$ und $10{,}42$ kann eine stabile Gehäuseform überhaupt nicht mehr aufrecht erhalten werden.

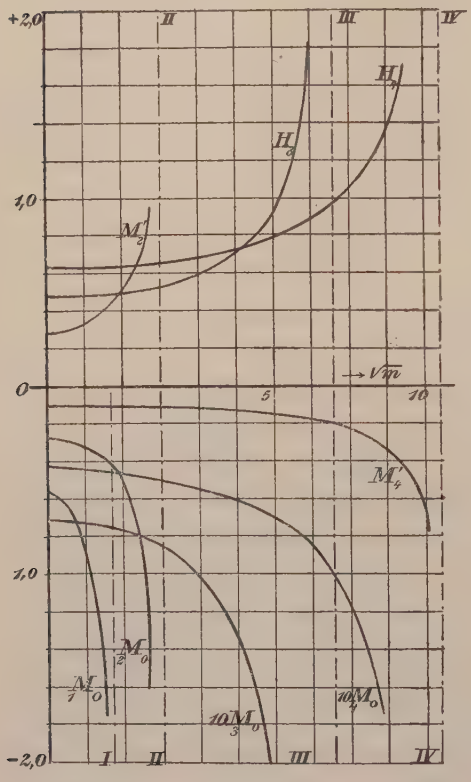
Die Ausführungen am Schluß des Abschnitts II sind zu wiederholen; gestattet man den Auflagerpunkten, der Ausdehnung durch Erwärmung bei Dauerbetrieb und nur dieser zu folgen, so verschwinden die Temperaturspannungen, und der Einfluß der Schwere und magnetischen Zugkräfte hat die Vorherrschaft auf die Deformation.

Um bei Anwendungen die Berechnung der komplizierten Funktionen in den Formeln zu vermeiden, haben wir in den Kurven Fig. 7 die Biegungsmomente M_0 im Scheitel nnd M' an den Auflagerflächen, ferner die Horizontalschübe H abhängig von $\sqrt{m}$ graphisch dargestellt, jedoch nur für die Schwere. Es ist:

$$M = r^2\gamma \cdot c \text{ kg cm}, \quad H = r\gamma c \text{ kg};$$

die Faktoren c sind den Kurven zu entnehmen; die Scheitelmomente M_0 III und M_0 IV sind zehnfach vergrößert gezeichnet. Die unteren Grenzen für die Trägheitsmomente wollen wir noch zahlenmäßig angeben:

Fig. 7.



Fall I	II
$m = 2{,}9$	9
$\Theta > 0{,}35$	0,11
III	IV
57,55	108,5
0,018	$0{,}009\frac{r^4\xi}{E}$.

Es sollen die bisherigen Rechnungen an drei Maschinen a), b), c), deren Gehäusequerschnitte in Fig. 8—10 (S. 27) im Maßstab 1 : 10 dargestellt sind, zahlenmäßig durchgeführt werden. Daß die charakteristischen Werte für drei irgendwie herausgegriffene Maschinen verschiedener Firmen und Konstrukteure in eine Reihe passen, kann nicht erwartet werden. Ein Konstrukteur bestimmt den Gehäusequerschnitt auf zulässige Durchbiegung, ein andrer auf zulässige Spannung im Gußeisen, fast alle nach mehr oder weniger bestimmten Erfahrungen mit Hilfe empirischer Faustformeln; ein ausgeprägt einheitliches Prinzip liegt nicht zugrunde.

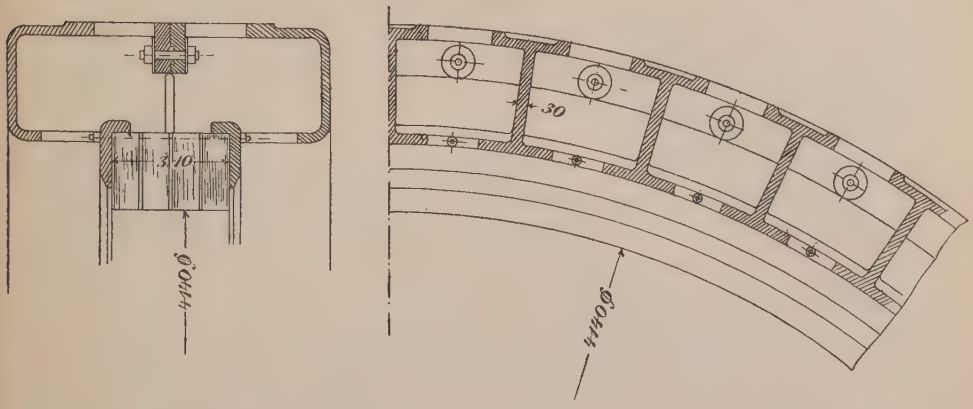
Die Magnetisierungskurve für Maschine a) wurde bereits in Fig. 1 (S. 4), die Kurve der magnetischen Zugkräfte in Fig. 2 (S. 5) gezeichnet.

	a)	b)	c)
Leistung in Kilowatt induktionsfrei	1200	800	3000 Kw.
Umläufe in der Minute	125	79	71,5
Durchmesser der Gehäusebohrung	414	600	802,4 cm
Blechpaketbreite + Luftschlitze	$28 + 3 \cdot 1$	27	$29 + 4 \cdot 1{,}5$ cm
Luftraum einseitig	0,6	0,7	1,2 cm.

Welche Rolle spielt das aus einzelnen Segmenten geschichtete Blechpaket bei Berechnung des Trägheitsmoments? Wenn die Stoß-

fuge durch das ganze Blechpaket geht, wie man bei älteren Maschinen noch sehen kann, trägt der Anker überhaupt nichts, weil ein solcher Ring, seines Haltes beraubt, zusammenstürzt. Wenn die Segmente

Fig. 8. (Maschine a.)



sich abwechselnd überdecken und wie eine starre Kette um den ganzen Ring herum sich fortsetzen, so trägt mindestens ein Teil bei dem hohen Druck, unter dem das Paket steht und bleibt, auch wenn die Isolation schwindet. Der durchlochte Nutenrand trägt natürlich gar nicht. In

Fig. 9. (Maschine b.)

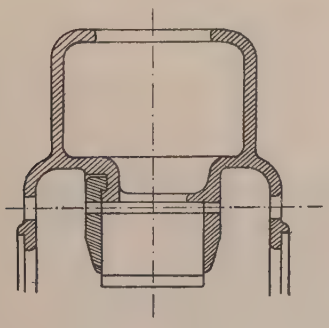
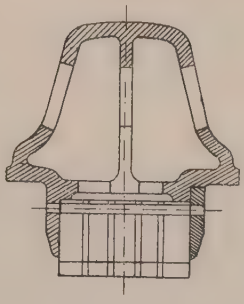


Fig. 10. (Maschine c.)



den nachfolgenden Angaben ist das Blechpaket halb, also wie ein gußeiserner Querschnitt gerechnet, da Schmiedeisen den doppelten Elastizitätsmodul besitzt. Am besten wird das Produkt $E\Theta$ durch einen Versuch für eine Type bestimmt; zieht man etwa die Enden der horizontal liegenden Gehäusehälfte durch eine bekannte Kraft P möglichst reibungsfrei zusammen, so ist die Durchmesserdifferenz

$$D - D' = \frac{\pi}{2} \frac{r^3 P}{E\Theta} \text{ cm } (P \text{ in kg}).$$

Als totales Gewicht des ganzen Gehäuseumfangs, einschließlich Blechpaket mit Wicklung ergibt sich:

	$Q =$	a) 16500	b) 32000	c) 32000 kg
Schwerpunktsradius	$r =$	232	332	428 cm
Schwere pro cm Umfang	$\gamma =$	11,3	15,3	12 kg/cm
Torsion pro cm Umfang	$\tau =$	2,9	1,5	3,7 kg/cm
Mittl. Trägheitsmoment über die Polleitung	$\Theta =$	$20 \cdot 10^4$	$45 \cdot 10^4$	$36 \cdot 10^4$ cm^4.

Wir sehen, daß bei der Maschine b) (Fig. 9) mit 600 cm Gehäusebohrung an Material vergleichsweise mit den andern nicht sehr gespart wurde. Die Zahlen sind Annäherungswerte. Mit $E = 10^6$ kg/qcm Elastizitätsmodul für Gußeisen ergibt sich:

$k =$	a) $\frac{232^4 \cdot 11{,}3}{20 \cdot 10^{10}} = 0{,}16$	b) 0,41 cm	c) 1,12 cm
$\xi =$	a) 38	b) 33	43 kg/cm
$m =$	0,55	0,88	4,0
$\sqrt{m} =$	0,74	0,94	2,0

Bei der Maschine c) (Fig. 10) mit 802,4 cm Bohrung ist also die kritische Grenze für Fall I mit vollkommener Freiheit der Enden überschritten.

Die Durchsenkungen infolge des Eigengewichts sind im Falle I nach Kurve I (Fig. 6, S. 21):

$e_1 =$ a) $-0{,}32 \cdot 0{,}16 = -0{,}05$ cm, b) $= -0{,}37 \cdot 0{,}41 = -0{,}15$ cm,
c) — — —

So ungenügend ist keine Fundamentierung, wie sie Fall I voraussetzt; den tatsächlichen Verhältnissen wird Fall III mit festen, jedoch noch drehbaren Enden weit mehr entsprechen. Hierfür ist:

$e_3 =$ a) $-0{,}013 \cdot 0{,}16 = -0{,}002$, b) $= -0{,}013 \cdot 0{,}41 = -0{,}006$ cm,
c) $= -0{,}014 \cdot 1{,}12 = -0{,}016$ cm.

Die magnetischen Zugkräfte, welche im Falle I die Maschine c) wahrscheinlich zum Bruche geführt hätten, sind bei der Auflagerungsbedingung III kaum merkbar, wie aus dem Charakter der Kurve III (Fig. 6) hervorgeht, und die Durchbiegung selbst verschwindend.

Die größte Spannung im Gußeisen pflegt einzutreten, wenn die obere Gehäusehälfte bei der Montage am Kranhacken hängt und etwa in der Mitte durch ein Seil befestigt ist; das zugehörige Moment ist $r^2\gamma$;

W sei das Widerstandsmoment des Querschnitts in cm^3, dann wird, wenn:

$r^2\gamma =$ a) $61 \cdot 10^4$, b) $169 \cdot 10^4$, c) $220 \cdot 10^4$ kgcm,

$W =$ a) 8000, b) 12000, c) 9000 cm^3,

$\sigma =$ a) 75, b) 140 c) 250 kg/qcm,

während $\sigma = 300$ kg/qcm als zulässige Spannung für Gußeisen bei ruhender Belastung gewöhnlich angenommen wird. Die Spannungen werden übrigens sehr herabgemindert, wenn das Gehäuse in seitlichen Ösen hängt, und es kann dann möglicher Weise eines der Momente M_0 und M', die wir in den Kurven Fig. 7 aufgetragen haben, den Ausschlag für die zulässige Spannung geben.

IV.

Der statischen Berechnung folgt eine mehr qualitative Betrachtung der dynamischen Vorgänge. Bei Kurzschluß und plötzlichen Belastungsstößen werden durch die Störung des Gleichgewichts elastische Schwingungen ausgelöst. Wir bestimmen zunächst die Eigenschwingungszahl des Gehäusebogens unter dem Einfluß der magnetischen Zugkräfte; die stabil elastischen Kräfte üben keinen Einfluß auf sie aus. Der Gedankengang erfolgt nach dem Prinzip von d'Alembert: die Beschleunigungskräfte müssen durch die Resultierende der äußeren und inneren statischen Kräfte aufgebracht werden. Die Lösung ist in unserer allgemeinen Gleichung (17) bereits enthalten, wir haben nur die radial gerichteten Beschleunigungskräfte $-\frac{\gamma}{g}\frac{d^2p}{dt^2}$ als neues Glied hinzuzufügen:

$$p + 2\frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 p}{\partial \varphi^4} = m(p-\mu) - \frac{r^4\gamma}{E\Theta g}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(p-\mu); \quad \mu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} p \cos\varphi d\varphi.$$

Dieser partiellen Differentialgleichung genügen unendlich viele Sinusschwingungen $u \sin\frac{\pi x}{30}t$ als Einzellösungen, da außer dem Grundton noch unendlich viele Obertöne erregt werden können; durch die Lage und Geschwindigkeit, die jeder Punkt bei Anfang der Bewegung besaß, ist jedoch die Lösung eindeutig bestimmt. Setzen wir, um die Schwingungszahlen x/min zu erhalten, obige periodische Lösung für p ein, so wird

$$u + 2\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + \frac{d^4 u}{d\varphi^4} = \left(m + \frac{r^4\gamma}{E\Theta g}\left(\frac{\pi x}{30}\right)^2\right)(u - U); \quad U = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \cos\varphi d\varphi.$$

Setzen wir $\varkappa = m + \frac{r^4 \gamma}{E \Theta g} \left(\frac{\pi x}{30}\right)^2$; $\alpha = \sqrt{1 + \sqrt{\varkappa}}$, $\beta = \sqrt{1 - \sqrt{\varkappa}}$, dann ist die Lösung mit den Integrationskonstanten A und B

$$(26) \quad u = A\left(\cos \alpha\varphi + \sqrt{\varkappa} \cos \alpha \frac{\pi}{2}\right) + B\left(\cos \beta\varphi - \sqrt{\varkappa} \cos \beta \frac{\pi}{2}\right),$$

wenn wir gleich Symmetrie der Schwingungslinie zur Nullachse annehmen. Für die Integrationskonstanten A und B und die Eigenschwingungszahlen x ergeben sich aus der Eigenart der Auflagerung Fall I—IV weitere Bedingungsgleichungen. Zunächst muß stets $\int_0^{\frac{\pi}{2}} u \, d\varphi = 0$, denn die dynamischen Radialschwingungen können die Länge der elastischen Linie nicht ändern, ferner ist bei völliger Freiheit der Enden, sich zu verschieben und zu drehen (Fall I), ein Horizontalschub H nicht vorhanden, also $\frac{d}{d\varphi}(u + u'') = 0$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{a)} \quad \int p \, d\varphi = 0; \quad A\left(\frac{\sin \alpha \frac{\pi}{2}}{\alpha} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\varkappa} \cos \alpha \frac{\pi}{2}\right) + B\left(\frac{\sin \beta \frac{\pi}{2}}{\beta} - \frac{\pi}{2}\sqrt{\varkappa}\right) = 0,$$

$$\text{b)} \quad H = 0; \qquad A\alpha \sin \alpha \frac{\pi}{2} - B\beta \sin \beta \frac{\pi}{2} = 0.$$

Diese beiden Gleichungen sind offenbar nur dann mit einander verträglich, wenn sie für das Verhältnis $\frac{B}{A}$ den gleichen Wert ergeben, d. i. wenn die sogenannte Resultante der beiden linearen Gleichungen gleich Null ist. Dies ergibt nach einigen Vereinfachungen den uns aus Gleichung (22) bekannten Ausdruck:

$$\Delta_1 = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \frac{\pi}{2}}{\alpha} - \frac{\operatorname{cotg} \beta \frac{\pi}{2}}{\beta} - \frac{4}{\pi \sqrt{\varkappa}\,(\varkappa - 1)} = 0.$$

Diese Gleichung wird erfüllt durch unendlich viele Werte $\varkappa_0\ \varkappa_1\ \varkappa_2 \ldots$, uns interessiert nur die Schwingungszahl des Grundtons, gegeben durch

$$\varkappa_0 = 2{,}9; \quad x_0 = 300 \sqrt{\frac{\varkappa_0 - m}{k}} \text{ volle Schwingungen/min.}$$

Das vollständige Integral würde sein:

$$p = \sum_{\varkappa = \varkappa_0 \varkappa_1 \cdots \varkappa_n}^{\varkappa = \varkappa_0 \varkappa_1 \cdots \varkappa_n} u \sin \frac{x\pi}{30} t.$$

Läuft das Magnetrad exzentrisch, so verdichten sich dort die Kraftlinien, der magnetische Zug wächst dort und wandert mit dem

Magnetrad herum. Trifft der tiefste Schwingungsausschlag räumlich und zeitlich jedesmal mit dem eben vorbeipassierenden Maximum der verdichteten magnetischen Zugkräfte zusammen, so ist elastische Resonanz vorhanden, und die dynamischen Deformationen werden sehr groß. Bedingung ist jedoch hierfür, daß die Schwingungszahl x_0 des Grundtones der elastischen Eigenoszillation mit der Betriebstourenzahl übereinstimmt. Bei Maschine c) könnte dies eintreten, wenn etwa im Prüfraum die provisorische Aufstellung zu wenig solide ist. Eine solche Resonanz wurde bei einer Maschine beobachtet, deren Gehäuse unterhalb des Schwerpunktes gestützt war; bei einer bestimmten Tourenzahl schwankte der Gehäusebogen sichtbar, jenseits bei normaler Tourenzahl trat wieder ruhiger Gang ein. Dennoch wurden vorsichtshalber die Stützen durch solche in der horizontalen Trennungslinie ersetzt, die ja zugleich durch den Schwerpunkt geht.

Bezüglich der Auflagerungsbedingungen Fall II—IV geben wir an, daß analog Fall I die Gleichungen:

$$\Delta_2 = \alpha \sin \alpha \frac{\pi}{2} = 0; \quad \Delta_3 = \frac{\operatorname{tg} \alpha \frac{\pi}{2}}{\alpha} (\sqrt{\varkappa} - 1) + \frac{\operatorname{tg} \beta \frac{\pi}{2}}{\beta} (\sqrt{\varkappa} + 1) - \pi \sqrt{\varkappa} = 0$$

$$\Delta_3 = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \frac{\pi}{2}}{\alpha} - \frac{\operatorname{cotg} \beta \frac{\pi}{2}}{\beta} - \frac{4\sqrt{\varkappa}}{\varkappa - 1} = 0, \text{ erfüllt durch } \varkappa_0 = 9; 57{,}55; 108{,}5,$$

die entsprechenden Schwingungszahlen des Grundtons ergeben. Da die Lösungen für u und die Bedingungsgleichungen für die Konstanten A und B dieselben sind, wie im statischen Fall, so ist dies leicht einzusehen.

In letzterer Zeit sind durch direkte Kupplung mit Dampfturbinen schnelllaufende Generatoren mit großen Leistungen in Anwendung gekommen. Die Durchmesser der Gehäuse werden hierbei klein, so daß sie als praktisch starr zu betrachten sind. Inwieweit werden nun die Erscheinungen an Wellen hoher Umlaufszahl, wie sie besonders durch die De Laval-Turbine charakterisiert werden, durch das Hinzutreten der magnetischen Zugkräfte beeinflußt? Es gibt bekanntlich für jede Welle eine kritische Tourenzahl, bei welcher ein heftiges Schleudern infolge der unvermeidlichen Exzentrizität des Schwerpunktes eintritt: die elastische Resonanz entsteht, wenn die Eigenschwingungszahl der Welle gleich ist ihrer Betriebstourenzahl. A. Föppl hat zuerst die Bewegungsgleichungen für diese Erscheinungen aufgestellt (s. Technische Mechanik IV. T. Dynamik). Die gewöhnlichen Wellen des Maschinenbaues laufen möglichst weit unter dieser Grenze, die Wellen nach De Laval möglichst weit jenseits, wo ja wieder ruhiger Gang infolge

Rotation um den Schwerpunkt eintritt. Die Form der Gleichungen bleibt unter Zuziehung der magnetischen Zugkräfte dieselbe, nur die auftretenden Konstanten ändern sich[1]), und zwar wird durch die magnetischen Züge die kritische Tourenzahl herabgesetzt.

Dem Maschineningenieur ist im allgemeinen die höchste Ökonomie weniger erreichbar als dem Elektriker, der sein Material hinreichend kennt, um Gewicht pro Voltampere und Polteilung, Nutzeffekt und Spannungsabfall auf Prozente genau voraus zu bestimmen; es laufen zu viele praktische Nebenrücksichten mit unter, die nicht minder ausschlaggebend sind.

Aufgabe einer das Wesentliche voll beachtenden und auf die Erfahrung gegründeten Untersuchung soll es sein, die Unterlagen zur Bestimmung der Grenzen der Konstruktion zu liefern, wozu das Gegebene ein Beitrag sein soll.

---

1) Nach Föppl ist die kritische Umdrehungszahl n der Welle: $n = 300\sqrt{\frac{\alpha}{G}}$ Uml/min, wenn G das Gewicht des Schwungkörpers (hier der Anker) in kg ist und α in kg/cm die Kraft angibt, die die Welle um 1 cm durchbiegt. Wie leicht einzusehen, wird durch die Exzentrizität e der Welle eine Resultierende R den magnetischen Zugkräfte geweckt, die im Sinne der Durchbiegung e wirkt; $R = 2\int_0^{\pi} Z \cos\varphi \, d\varphi \cdot r$, $R = 2\int_0^{\pi} (Z_0 - e\cos\varphi \cdot \xi)\cos\varphi \pi \, d\varphi = er\xi\pi$ kg (r = Radius der Bohrung). Die Kraft, die die Welle um e cm durchbiegt, ist dann $P = \alpha e - er\xi\pi = (\alpha - r\xi\pi)e$ kg und die kritische Tourenzahl $n = 300\sqrt{\frac{\alpha - r\xi\pi}{G}}$.